

APLICAÇÕES DA INTEGRAL

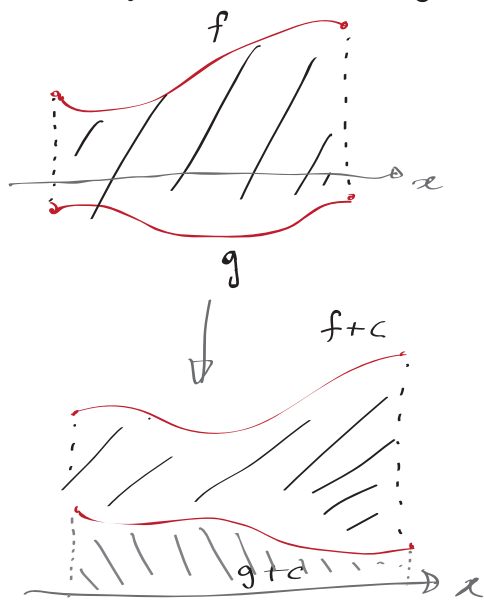
1. Área

$f \geq 0$ em $[a, b]$ então

$\int_a^b f(x) dx =$ área abaixo do gráfico de f e acima do intervalo $[a, b]$.

Situação mais geral: f e g defts em $[a, b]$

$f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$. Calcular a área entre os gráficos de f e g .

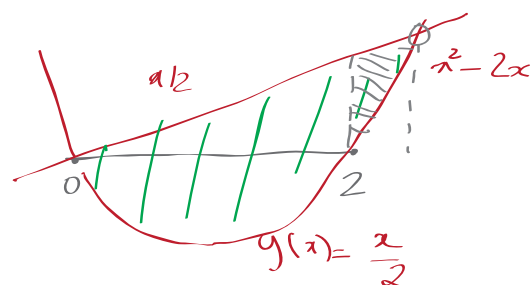


Área = área abaixo do gráfico de $f+c$ — área abaixo do gráfico de $g+c$

$$= \int_a^b (f(x)+c) dx - \int_a^b (g(x)+c) dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x) + c - c] dx$$
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Exemplo: Calcule a área da região entre os gráficos de f e g sobre o intervalo $[0, 2]$ se $f(x) = x(x-2)$ e $g(x) = \frac{x}{2}$.



$$f(x) = x^2 - 2x$$

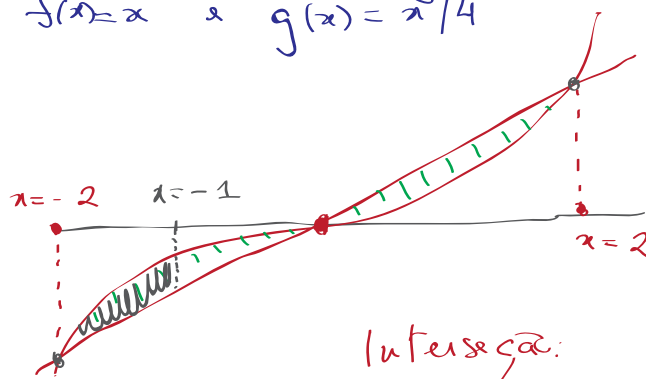
$$g(x) = \frac{x}{2}$$

$$\int_0^2 \left[\frac{x}{2} - (x^2 - 2x) \right] dx = \int_0^2 \left(-x^2 + \frac{5x}{2} \right) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} \Big|_0^2 = -\frac{2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{4}$$

$$= 5 - \frac{8}{3} = \left(\frac{7}{3} \right)$$

Exemplo: Calc. a área da região entre os gráficos de f e g sobre o intervalo $[-1, 2]$ onde $f(x) = x$ e $g(x) = x^3/4$



Interseção:

$$x = \frac{x^3}{4}$$

$$\frac{x^3}{4} - x = 0$$

$$x \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right) = 0$$

$$x=0 \quad x = \pm 2$$

Área:

$$[-1, 0]: \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{4} - x \right) dx$$

+

$$[0, 2]: \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4} \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{4} - x \right) dx = \left. \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^0 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}$$

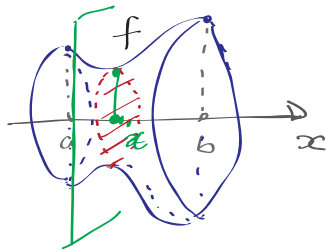
$$\int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4} \right) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} \right|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{16}{16}$$

+

$$\frac{23}{16}$$

Exercício: seção 2.4.

2. Volume de Sólidos de Revolução



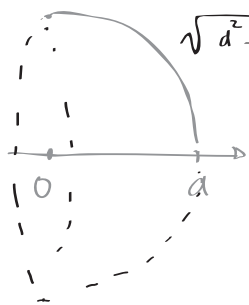
raio do círculo = $f(x)$

área do circ = $\pi [f(x)]^2$

$$\text{Vol} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$= \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Exemplo: Esfera de raio a .



vol. hemisfério:

$$\pi \int_0^a f^2(x) dx$$

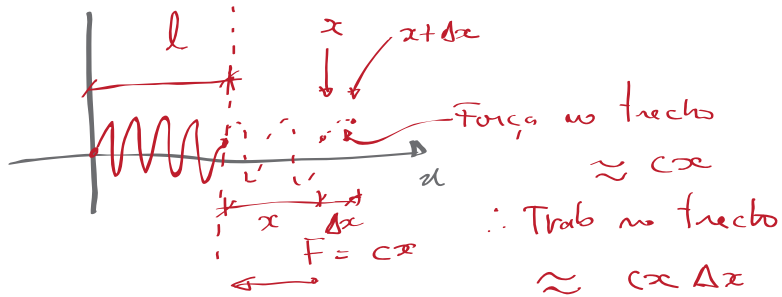
$$= \pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

$$= \pi \left(a^2 \cdot a - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2\pi a^3}{3} \quad \text{Esfera: } 2 \times \text{hemisf} = \frac{4\pi a^3}{3}$$

3. Trabalho

Exemplo: Calcule o trabalho necessário para esticar uma mola de constante c a um comprimento a além do seu comprimento natural



$$W \approx \sum cx_i \Delta x_i$$

Passando ao limite,

$$W = \int_0^a cx \, dx$$

$$\int_0^a cx \, dx = \left. \frac{cx^2}{2} \right|_0^a = \frac{ca^2}{2}$$

Secão 2.15

Em geral

$$W = \int_a^b F(x) \, dx$$