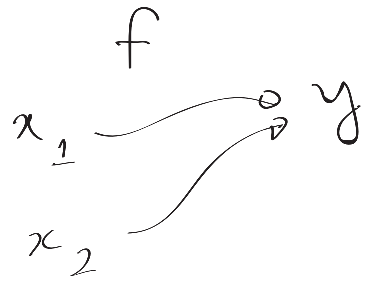
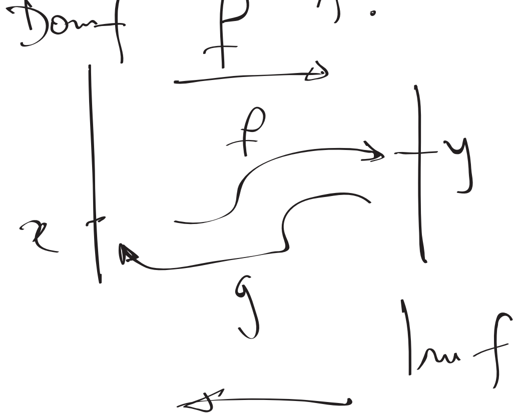
<u>Funções Inversas</u>



Suponha que f seja tal que para cada y na imagem de f exista um único x tal que $f(x) = y$. Então podemos construir uma função cujo domínio é a imagem da função f.



Para cada $y \in \text{Im} f$ definimos $g(y)$ como sendo o único $x \in \text{Dom} f$ tal que $f(x) = y$.

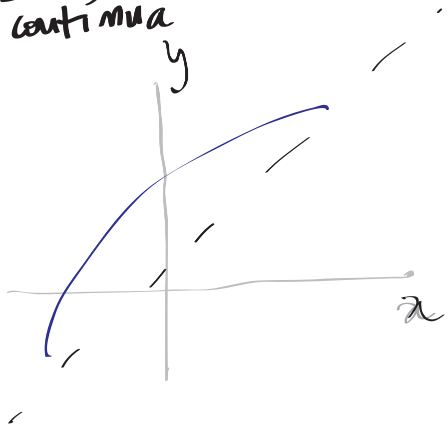
A fç g é chamada de <u>inversa</u> de f e temos

$$f(g(y)) = y$$
$$g(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in \text{Dom} f,\ y \in \text{Im} f$$

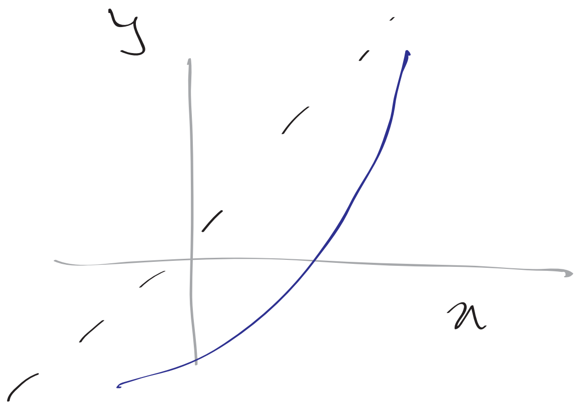
<u>Ex</u>: $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.

$g(y) = \sqrt{y}$ é inversa de f.

$\underbrace{f}_{\text{contínua}}$ possui inversa $\Longleftrightarrow$ f é estr. cresc. ou estr. decresc.



$\Longleftrightarrow$



f contínua $\Longrightarrow$ Inversa de f contínua.

TEOREMA: Seja f estr. cresc. e contínua em $[a,b]$, e g a inversa de f. Se a derivada $f'(x)$ existir e for dif. de zero em um ponto $x \in (a,b)$, então $g'(y)$ também existe e é dif. de zero, onde $y = f(x)$. Além disso,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Notação de Leibniz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

PROVA: $\dfrac{g(y+k)-g(y)}{k} = \dfrac{h}{f(x+h)-f(x)} = \dfrac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \to f'(x)$

$h = g(y+k) - g(y) = g(y+k) - x$

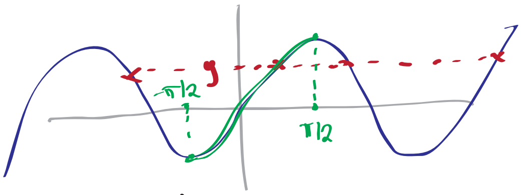
$\therefore \; x + h = g(y+k)$.

$y + k = f(x+h) \;\therefore\; k = f(x+h) - f(x)$

g cont $\Longrightarrow$ quando $k \to 0$
$g(y+k) \to g(y)$
$\therefore \; h \to 0$

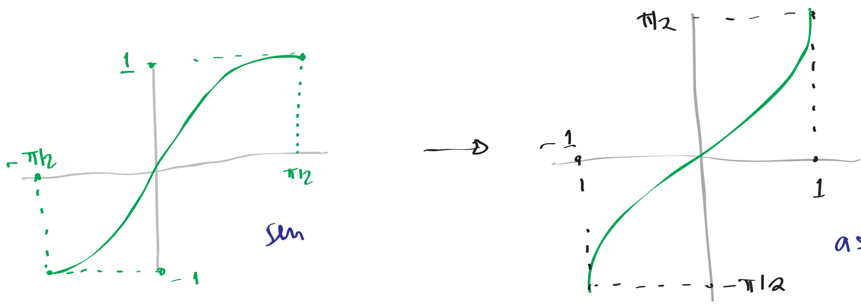
Funções Trig. Inversas

Sen x



No intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ sen é estritamente crescente. Sua inversa é conhecida como arco_seno

$\operatorname{asen} y :=$ o ângulo $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ tal que $\operatorname{sen} x = y$.



asen:
- contínua
- estr. crescente
- derivável, exceto em $-1, 1$

Derivada de asen.

$$\operatorname{asen}' y = \frac{1}{\operatorname{sen}' x} = \frac{1}{\cos x}$$

$\boxed{y = \operatorname{sen} x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{asen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{asen} x + C.$$

Integral de asen.

$$\int \operatorname{asen} x \, dx$$

$u = \operatorname{asen} x \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$v = x \quad dv = dx$

$$\int \operatorname{asen} x \, dx = x \operatorname{asen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + C$$

$$= \boxed{x \operatorname{asen} x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

$u = 1 - x^2$

$du = -2x\,dx$

$-\frac{1}{2} du = x\,dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{-\frac{1}{2} du}{\sqrt{u}}$$

asen.

$$= -1 \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

atan $\quad y = \tan x$

$$\operatorname{atan}' y = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{atan} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{atan} x + C.$$

Exercício: Calcular $\int \operatorname{atan} x \, dx$ (por partes).